Ορισμός:

Για ένα σύνολο A ονομάζουμε δυναμοσύνολο του A, το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A (κι λόγω αυτό).

Συμβολισμός $P(A)$ ή 2^A

π.χ.:
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{\alpha\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}\}$
- $P(\{\alpha,\beta\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\}\}$
- $P(\{\alpha,\beta,\gamma\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$

→ όταν το A έχει n στοιχεία το $P(A)$ έχει 2^n στοιχεία

- $P(\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\alpha,\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\delta\}, \{\alpha,\gamma,\delta\}, \{\beta,\gamma,\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\}$

Ορισμός: Έστω A, B δύο σύνολα.
Το καρτεσιανό γινόμενο των A, B είναι το σύνολο $A \times B = \{(x,y) \; x \in A, y \in B\}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: $\forall A$

$A \times \emptyset = \emptyset$

$\emptyset \times A = \emptyset$

Συμβολισμός: $A^2 = A \times A$

Επίσης ένα σύνολο A $\quad D_A = \{(x,x), x \in A\}$
Το σύνολο D_A λέγεται διαγώνιος του A

Σημείωση: Γενικά δεν είναι σωστό ότι $A \times B = B \times A$

π.χ. $A = \{1,2\}, B = \{3\}$
$A \times B = \{(1,3), (2,3)\}$
$B \times A = \{(3,1), (3,2)\}$

Το διατεταγμένο ζεύγος (y,x) λέγεται αντίστροφο του διατεταγμένου ζεύγους (x,y)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$(x,y) \notin A\times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$

Απόδειξη: $(x,y)\notin A\times B \Leftrightarrow \sim((x,y)\in A\times B) \Leftrightarrow \sim(x\in A \wedge y\in B)$

$\Leftrightarrow (\sim(x\in A)) \vee (\sim(y\in B)) \Leftrightarrow x\notin A \vee y \notin B$

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ, ΤΕΤΡΑΔΕΣ ΚΤΛ

$(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha,\beta),\gamma)$

Αποδεικνύεται ότι $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \Leftrightarrow \alpha_1=\beta_1 \wedge \alpha_2=\beta_2 \wedge \alpha_3=\beta_3$

Ομοίως για τετράδες κτλ.

Συλλογή συνόλων ονομάζουμε οποιοδήποτε σύνολο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι σύνολα

π.χ. $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{1,4\}\}$

Αν $\mathcal{C}$ είναι μια συλλογή συνόλων ορίζουμε την τομή της $\mathcal{C}$ $\cap\mathcal{C} = \{x : \forall X\in\mathcal{C} \; x\in X\}$

την ένωση της $\mathcal{C}$ $\cup\mathcal{C} = \{x : \exists X\in\mathcal{C} \; x\in X\}$

Έτσι, στο προηγούμενο πχ όπου $\mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{1,4\}\}$

$\cap\mathcal{C} = \{1\}$

$\cup\mathcal{C} = \{1,2,3,4\}$

Αν $\mathcal{C} = \{A,B\}$ $\cap\mathcal{C} = A\cap B$ κ' $\cup\mathcal{C} = A\cup B$

→ Έστω Ω είναι ένα βασικό σύνολο κ' $E\subseteq\Omega$

Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται κάλυμμα του E (ή καλύπτει το E) αν $E\subseteq\cup\mathcal{C}$

Πχ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
$E = \{1,3,5\}$

$\mathcal{C}_1 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$
Η $\mathcal{C}_1$ είναι κάλυψη του E, διότι $E \subseteq \mathcal{C}_1$

Ορισμός: Έστω Ω ένα σύνολο.
Μία συλλογή μη κενών συνόλων $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται διαμέριση του Ω αν
(i) $\cup\, \mathcal{C} = \Omega$
(ii) $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ με $X \neq Y$ ισχύει $X \cap Y = \emptyset$

Πχ
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow$ η $\mathcal{C}_1 = \{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$ είναι μία διαμέριση του Ω
$\rightarrow$ η $\mathcal{C}_2 = \{\{1,4,6\},\{3,5\},\{2\}\}$ —''—
$\rightarrow$ η $\mathcal{C}_3 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$ —''—
η $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset,\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$ δεν είναι διαμέριση του Ω, διότι $\emptyset \in \mathcal{C}_4$
η $\mathcal{C}_5 = \{\{1,2,3\},\{3,4,5,6\}\}$ —''—, διότι $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5,6\} \neq \emptyset$
η $\mathcal{C}_6 = \{\{1,2\},\{3,6\},\{4\}\}$ —''—, διότι $\cup\, \mathcal{C}_6 = \{1,2,3,4,6\} \neq \Omega$

π.χ. Αν $\Omega = \mathbb{R}$
η $\mathcal{C} = \{[x, x+1) \;\; x \in \mathbb{Z}\}$ είναι μία διαμέριση του $\mathbb{R}$
η $\mathcal{A} = \{[x, x+1] \;\; x \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι διαμέριση του $\mathbb{R}$, διότι πχ. $[1,2] \in \mathcal{A}$
κ' $[1,2] \cap [2,3] = \{2\} \neq \emptyset$
η $\mathcal{B} = \{(x, x+1) \;\; x \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι διαμέριση του $\mathbb{R}$, διότι $\cup\, \mathcal{B} \neq \mathbb{R}$

Πρόταση: Αν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ διαμερίσεις του Ω κ' ισχύει $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ τότε $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

Απόδειξη: Αρκεί ισδ $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$
Έστω $X \in \mathcal{C}_2$, τότε $X \neq \emptyset$, άρα $\exists x \in X$. Τότε $x \in \cup\, \mathcal{C}_2$
Επειδή οι $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ είναι διαμερίσεις του Ω έχουμε $\cup\, \mathcal{C}_1 = \Omega$, $\cup\, \mathcal{C}_2 = \Omega$. Άρα
$x \in \cup\, \mathcal{C}_1$, συνεπώς $\exists Y \in \mathcal{C}_1$ ώστε $x \in Y$
Επειδή από υπόθεση $Y \in \mathcal{C}_1$ κ' $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, προκύπτει $Y \in \mathcal{C}_2$
Επειδή $x \in X$, $x \in Y$, έχουμε $x \in X \cap Y$, άρα $X \cap Y \neq \emptyset$
Από τον ορισμό της διαμέρισης δύο σύνολα που ανήκουν σε αυτή είτε είναι ξένα είτε ίσα μεταξύ τους. Άρα $X = Y$. Επειδή $Y \in \mathcal{C}_1$ συμπεραίνουμε ότι
$x \in \mathcal{C}_1$. Άρα $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$, επομένως $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

Άσκηση: Έστω A, B δύο σύνολα. Ναι δο $A\times B = B\times A \Leftrightarrow A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ ή $A=B$

Λύση: $\Leftarrow$) Αν $A=\emptyset$ τότε $\left.\begin{array}{l} A\times B = \emptyset\times B = \emptyset \\ B\times A = B\times\emptyset = \emptyset \end{array}\right\}$ άρα $A\times B = B\times A$

Αν $B=\emptyset$ ομοίως

Αν $A=B$ τότε $A\times B = A\times A = B\times A$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι $A\times B = B\times A$

Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ ισχύει το ζητούμενο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $A\neq 0, B\neq 0$

Άρα $\exists a\in A, b\in B$

Θέλουμε νδο $A=B$, δηλαδή ότι $A\subseteq B$ κ' $B\subseteq A$.

Δείχνουμε ότι $A\subseteq B$:

Έστω $x\in A$, τότε εφόσον $b\in B$ έχουμε $(x,b)\in A\times B$

Εφόσον $A\times B = B\times A$ προκύπτει ότι $(x,b)\in B\times A$, άρα $x\in B$ (κ' $b\in A$)

Συνεπώς $\boxed{A\subseteq B}$

Δείχνουμε ότι $B\subseteq A$

Έστω $y\in B$. Τότε αφού $a\in A$ έχουμε $(a,y)\in A\times B$, άρα, εφόσον $A\times B = B\times A$

θα έχουμε $(a,y)\in B\times A$, άρα ($a\in B$ κ') $y\in A$. Συνεπώς $\boxed{B\subseteq A}$

Επομένως, $A=B$

Άσκηση:

$A\times(B\cap\Gamma) = (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

Λύση:

Έστω τυχαία x, y

$(x,y)\in A\times(B\cap\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cap\Gamma \Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in\Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B \wedge x\in A \wedge x\in\Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y) \in A\times B \wedge (x,y) \in A\times \Gamma \Leftrightarrow (x,y) \in (A\times B)\cap(A\times\Gamma)$

$(B\cap\Gamma)\times A = (B\times A)\cap(\Gamma\times A)$ Απ. ομοίως.

Άσκηση: $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

Λύση: Έστω τυχαία x, y

$(x,y)\in A\times(B\cup\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup\Gamma \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B \vee y\in\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in A\times\Gamma$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ είναι ταυτολογία

Επομένως, $A\times(B\cup\Gamma) = (A\times B)\cup(A\times\Gamma)$

Άσκηση: $(B\cup\Gamma)\times A = (B\times A)\cup(\Gamma\times A)$ ομοίως.

Άσκηση: $A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$

Λύση: Έστω τυχαία x,y

$(x,y)\in(A\times B)-(A\times\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\notin A\times\Gamma$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin A\vee y\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow ((x\in A\wedge y\in B)\wedge x\notin A)\vee((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B-\Gamma$

$\Leftrightarrow x\in A\times(B-\Gamma)$

Επομένως, $A\times(B-\Gamma) = (A\times B)-(A\times\Gamma)$